EXAMEN TEST MATES II_2022

1

$(a+b)(a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - \cancel{AB} + \cancel{BA} - B^2 = A^2 - B^2 \leftarrow \boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

$\boxed{AB = BA}$

Se cumple la igualdad $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ siempre que AB sea igual a BA. opc.c)

2 $A^2 = A$ opc. a)

- $A^4 = \underbrace{A^2}_{A} \cdot \underbrace{A^2}_{A} = A \cdot A = \underbrace{A^2}_{A} = A \rightarrow \boxed{A^4 = A}$

- si A es simétrica $\rightarrow A = A^t$

  $A^2 = A \cdot A = A^t \cdot A^t = A^{2t}$

3 TEORIA opc. b)

4 rango?

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}_{2\times 2} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \underbrace{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}_{\text{identidad trigonométrica} = 1} = 0$

rg máx

$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \rightarrow$ para cualquier valor de α, la identidad será igual a 1. Por tanto, $|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

5

$\begin{cases} \pi = 2x + y + z = 1 \\ \pi' = x + y - z = 0 \end{cases}$

$x \quad / + 2z = 1 \rightarrow z = \lambda \rightarrow x = 1 - 2\lambda$

$y = -x + z = -1 + 2\lambda + \lambda = -1 + 3\lambda$

$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r = (1, -1, 0) \\ \vec{v}_r = (-2, 3, 1) \end{matrix}$

Comprobamos si el pto $(-1, 2, 1)$ pertenece a la recta:

$r = \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -1 = 1 - 2\lambda \rightarrow \lambda = 1 \\ 2 = -1 + 3\lambda \rightarrow \lambda = 1 \end{matrix} \rightarrow$ si pertenece opc b)

6) $\vec{u} \perp \vec{v}$ ¿α entre $\vec{u}$ y $\vec{u}-\vec{v}$?

$$\alpha = (u, u-v)$$

- $\vec{u} \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \cancel{\vec{u}\vec{v}}^{\,0 (\perp)} = |\vec{u}|^2$

- $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})^2} = \sqrt{\vec{u}^2+\vec{v}^2-\cancel{2\vec{u}\vec{v}}^{\,0(\perp)}}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|} = \frac{\vec{u}^2 - \cancel{\vec{u}\vec{v}}^{\,0(\perp)}}{u\cdot\sqrt{(\vec{u}-\vec{v})^2}} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{(\vec{u}-\vec{v})^2}}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2+\vec{v}^2}$$ opc b)

7) $P_r = (-3,-1,0)$
$\vec{v_r} = (-2,3,-1)$

Podemos comprobar si el pto $(\underset{x}{3},1,0)$ pertenece a la recta:

$x = -3-2\lambda \rightarrow 3 = -3-2\lambda \rightarrow \lambda = -3$
$y = -1+3\lambda \rightarrow 1 = -1+3\lambda \rightarrow \lambda = 2/3$ No pertenece opc c)
$z = -\lambda \rightarrow 0 = -\lambda \rightarrow \lambda = 0$

8) $P = (2,4,1)$
$P_r = (2,3,-1)$
$\vec{PP_r} = (0,-1,-2)$
$\vec{v_r} = (1,2,1)$

$$\rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{v_r}\times\vec{PP_r}|}{|\vec{v_r}|} = \frac{\sqrt{5^2+2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \boxed{2'24\ u}$$ opc b)

$$\vec{v_r}\times\vec{PP_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (5,-2,-1)$$

9) Teoría $\rightarrow$ $f'(a) = 0$ $\rightarrow$ recta horizontal

La derivada en un pto igual a cero es una recta horizontal.

opc b)

10) $y = -x^2 + ax \rightarrow$ área $= 36$

$\rightarrow -x^2+ax = 0 \rightarrow x(-x+a) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = a \ (a>0)$

$$A = \int_0^a -x^2+ax\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_0^a = \frac{-a^3}{3}+\frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{6}\ u^2$$

$$36 = \frac{a^3}{6} \rightarrow a^3 = 36\cdot 6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$$

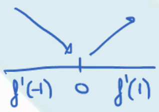
11

$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{e^{x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}=0\rightarrow e^{x}-e^{-x}=20\rightarrow e^{x}=e^{-x}$$

$$\rightarrow e^{x}=\frac{1}{e^{x}}\rightarrow e^{x}\cdot e^{x}=1$$

$$\rightarrow e^{2x}=1\rightarrow \cancel{Ln}\, e^{2x}=\cancel{Ln 1}^{\,0}\rightarrow \boxed{x=0}$$



x=0 es un mínimo.

12

$$\int_{-\pi/2 = a}^{\pi/2 = b} \underbrace{x^{2022}}_{par}\cdot \underbrace{sen\left(\frac{x^{3}}{\cos x}\right)}_{impar} dx = impar$$

Teoría: una función impar en un intervalo definido simétrico $(a=-b)$, su integral $=0 <$ menor que 1.

13

$p=$ Prob. roja $\longrightarrow p=\frac{x}{25}\longrightarrow x=25p$

$4p=$ Prob. azul $\longrightarrow 4p=\frac{y}{25}\longrightarrow y=100p$

$x+y=25\longrightarrow 25p+100p=25\longrightarrow p=\frac{1}{5}$

$\rightarrow$ si $y=100p\rightarrow \boxed{y=20}$

14 C = Cara + = cruz (en una moneda están al 50%)

$P(C\cap C)=P(C)\cdot P(C)=0'16\longrightarrow P(C)^{2}=0'16\longrightarrow P(C)=0'4$

$P(+)=1-P(C)=1-0'4=0'6$

$P(+\cap +)=P(+)\cdot P(+)=0'6\cdot 0'6=\boxed{0'36}$

15 Disjunto = incompatible $\longrightarrow P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\cancel{P(A\cap B)}^{\,0}$

a) $=0'2+0'67=0'87\longrightarrow$ SOL. VÁLIDA ✓

b) $=0'5+0'75=1'25\longrightarrow$ No es posible una prob > 1

PROBLEMA

$$C = \overline{A^2 - 4A} - 6B$$

- $4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$

- $6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix}$$

$$(A^2-4A)-6B = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix} = C$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \\ 2a^2-4a-6 & 0 \end{matrix} = -9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6) - [-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)] = 0$$

(no existen valores de a)

- $rg = 3 \rightarrow |C|_{3\times3} \neq 0 \rightarrow$ para todos los valores de a, $\nexists$ $rg = 3$

- $\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2\times2} \neq 0 \rightarrow rg = 2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9) = 0 \rightarrow -18a^2+36a+54 \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$

  → cuando $a \neq 3$ ó $a \neq -1$ → $rg(C) = 2$

  → cuando $a = 3$ ó $a = -1$ → $rg(C) = 1$

  → para ningún valor $\exists$ $rg(C) = 3$.

PROBLEMA 2

- Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

  $x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$ → Anulan el denominador

- Asíntotas

A.V → $\exists$ A.V en $x=2$ y $x=-2$

A.H → $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1}}{x^{2}-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind} \xrightarrow{D^\circ > N^\circ} = \boxed{0}$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$

$\exists$ A.H en $y=0$

A.O → $\nexists$

- Monotonía → $f'(x)=0$

$f(x) = \frac{x}{x^2-4} \longrightarrow f'(x) = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} \longrightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 \longrightarrow -x^2=4 \longrightarrow x^2=-4$ $\nexists$ Ptos relativos

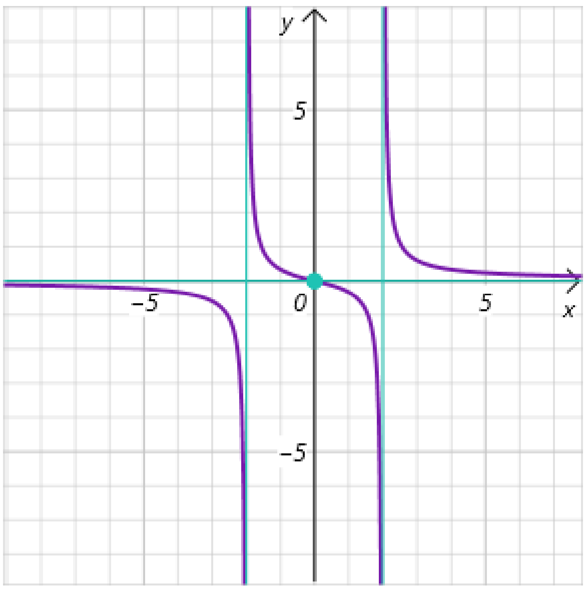
No hay máx ni mín. Estudiamos crecimiento con ptos NO DOM.

$\searrow$ -2 $\searrow$ 2 $\searrow$

$f'(-3)$ $f'(1)$ $f'(3)$

Decreciente en todos sus $\mathbb{R}$ de dominio

$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$



PROBLEMA 3

1) $\int x\cdot e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2} + C$

2) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \rightarrow \left\{ x = \text{sen}t \rightarrow dx = \cos t \right\}$

$\quad\hookrightarrow t = \text{arcsen}\,x$

$= \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \underbrace{\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}_{\cos t}\cdot \cos t\cdot dt$

$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \rightarrow \cos t = \sqrt{1-\text{sen}^2 t}$

$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1}{2}dt + \int \frac{\cos 2t}{2}dt =$

$\hookrightarrow \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\text{sen}\,2t} = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2\,\text{sen}t\cdot\cos t = \frac{t}{2} + \frac{\overbrace{\text{sen}t}^{x}\cdot\overbrace{\cos t}^{\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}}{2}$

$\hookrightarrow \text{sen}\,2t = 2\,\text{sen}t\cdot\cos t$

$\xrightarrow{t=\text{arcsen}\,x} = \frac{\text{arcsen}\,x}{2} + \frac{x\cdot\sqrt{1-\text{sen}^2 x}}{2} + C$

PROBLEMA 4

• método 1

$\rightarrow$ múltiplo de 5 desde el 4444 al 10000:

$\rightarrow \frac{4444}{5} < k < \frac{10000}{5}$

$\rightarrow 888'8 < k < 2000$

el + peque múltiplo de 5 — el + grande múltiplo de 5

$\rightarrow 2000 - 890 = \boxed{1110}$ múltiplos de 5

• $P = \frac{\text{Fav.}}{\text{Tot}} = \frac{1110}{10000} = \boxed{0'1111}$

• método 2

→ $P(\text{mayor que } 4444) = \frac{5555}{10000}$

→ $P(\text{múltiplo de } 5) = \frac{2}{10}$

↳ de cada 10 números tenemos 2 múltiplos de 5

$P(M4444 \cap \text{Mult}5)$

$P = \frac{5555}{10000} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{0'1111}$