PREGUNTAS TIPO DESARROLLO — Modelo 19.A

Conteste a los problemas de única Opción en hojas separadas.

Opción 1

1 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = A^{-1} - A$. Estudie el rango de la matriz B.

2 Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano $x + 2y + 2z - 4 = 0$ con los ejes coordenados.

Opción 2

3 Determine $\int x^2 \ln x^2 dx$. (logaritmo neperiano)

4 En una urna hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra urna hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas simultáneamente de una misma urna sin que se sepa de qué urna, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.

1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 1$

$\rightarrow B = A^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Rango de B?

$|B|_{3\times3} = 0$

$|B|_{2\times2} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(B) = 2}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

②

$\pi = x + 2y + 2z - 4 = 0$

$x \to y=0 \quad z=0 \longrightarrow x-4=0 \longrightarrow x=4 \longrightarrow A=(4,0,0)$

$y \to x=0 \quad z=0 \longrightarrow 2y-4=0 \longrightarrow y=2 \longrightarrow B=(0,2,0)$

$z \to x=0 \quad y=0 \longrightarrow 2z-4=0 \longrightarrow z=2 \longrightarrow C=(0,0,2)$

Volumen tetraedro $\to \dfrac{|\vec{OA} \times \vec{OB} \times \vec{OC}|}{6}$

origen $(0,0,0)$

$$\begin{cases} \vec{OA} = A - O = (4,0,0) \\ \vec{OB} = B - O = (0,2,0) \\ \vec{OC} = C - O = (0,0,2) \end{cases}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} \times \vec{OC} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 \quad \to \quad Vol = \frac{16}{6} = \boxed{\frac{8}{3}} \approx 2'\widehat{6}\ u^3$$

③ $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x^2 \, dx \quad \to \quad u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\begin{cases} u = \ln(x^2) \longrightarrow du = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \\ dv = x^2 \longrightarrow v = \displaystyle\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$= \ln(x^2) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x}\, dx$$

$$\hookrightarrow \frac{2}{3}\int x^2\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^3}{3} = \frac{2x^3}{9} + C$$

$\underline{\underline{\text{SOL}}} \rightarrow$ $$\frac{x^3 \ln x^2}{3} - \frac{2x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x^2 - \frac{2}{3}\right) + C$$

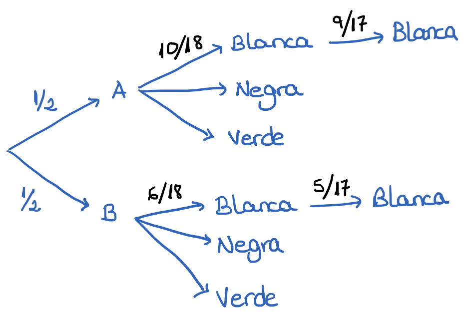
4) En una $\overbrace{\text{urna}}^{A}$ hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra $\overbrace{\text{urna}}^{B}$ hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas Simultáneamente de una misma urna sin que se sepa de cuál, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.

urna A = 10 B + 6 N + 2V = 18 Bolas

urna B = 6B + 8N + 4V = 18 Bolas

Se extraen 2 bolas blancas de una misma urna desconocida

¿ P(1ª urna) ?



<u>Teorema Bayes.</u>

$$P(A) = \frac{\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{17}\cdot\frac{6}{18}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{5/34}{5/34 + 5/102} = \frac{5/34}{10/51} = \boxed{\frac{3}{4}} = 0'75 \rightarrow 75\%$$